# Antennes - 4AS14 Travaux pratiques approfondis Master Sciences pour l'Ingénieur M1 - 2017-2018 Version 1.1



### Les antennes de type « cornet » pyramidal

19 mars 2018

### Table des matières

1	Inti	roduction	7
2	Ant	tennes étudiées : à lire avant la séance	7
	2.1	Rappel sur le guide d'ondes rectangulaire	7
	2.2	Cas d'un tronçon de guide d'ondes sectoriel en plan H	8
		2.2.1 Géométrie et mise en équations	8
		2.2.2 Résolution	10
		2.2.3 Application à l'antenne cornet	12
	2.3	Cas d'un tronçon de guide d'ondes sectoriel en plan E $\ \ldots$	13
		2.3.1 Géométrie	13
		2.3.2 Application à une antenne cornet sectorielle en plan E	14
	2.4	Cas d'une antenne cornet pyramidale	14
3	Cal	cul du champ électromagnétique rayonné : à lire avant la	
	séa	nce	<b>15</b>
	3.1	Par le théorème de Huygens	15
		3.1.1 Principe	15
		3.1.2 Calcul du champ rayonné	15
	3.2	Par une transformation champ proche-champ lointain	16
		3.2.1 Principe théorique	16
		3.2.2 Mise en œuvre	18
4	Tra	vail à effectuer sur place : simulation	21
	4.1	Étude des fonctions de Hankel	21
	4.2	Calcul du champ électrique lointain rayonné par le principe	
		de Huygens	23
	4.3	Calcul du champ électrique lointain rayonné par transforma-	
		tion champ proche champ lointain	24
5	Tra	vail à effectuer sur place : caractérisation expérimentale	27
	5.1	Matériel et logiciels disponibles	27
	5.2	Étalonnage de l'analyseur de réseau	28
	5.3	Adaptation de l'antenne	28
	5.4	Caractérisation de l'antenne en champ lointain	28
		5.4.1 En plan H : polarisation principale	29
		5.4.2 En plan H : polarisation croisée	29
		5.4.3 En plan E : polarisation principale	30
		5.4.4 En plan E : polarisation croisée	30
	5.5	Caractérisation de l'antenne en champ proche	30
		5.5.1 Acquisition du champ proche dans le plan E	31
		5.5.2 Acquisition du champ proche dans le plan H	31
		5.5.3 Traitement des données de champ proche	32

### 1 Introduction

Parmi les antennes issues des structures de guidage, les antennes de type cornet pyramidal se prêtent plus facilement que d'autres à une modélisation analytique approchée [1]. En effet, leur géométrie peut être décrite comme résultant de l'évasement d'un guide d'ondes rectangulaire qui, s'il est excité à une fréquence appropriée, ne transporte que le mode fondamental TE<sub>10</sub>.

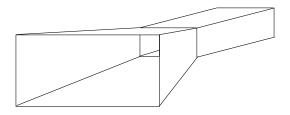


Figure 1 – Antenne cornet et guide d'ondes d'alimentation

Dans le cas où la transition allant de la section du guide d'ondes rectangulaire uniforme à l'espace libre est suffisamment progressive, on peut espérer retrouver un champ électrique dont l'amplitude variera transversalement dans l'ouverture de l'antenne comme celle du mode fondamental. En ce qui concerne la phase, il faudra la corriger en supposant que c'est un front d'onde à double courbure cylindrique qui émane du guide d'ondes et se propage dans le cornet [2]. Le mode fondamental du guide d'ondes rectangulaire s'exprimant sous la forme d'une fonction de deux variables séparables suivant respectivement le grand côté et le petit côté du guide.

Donc, après propagation dans le cornet, on peut supposer que le champ dans l'ouverture va s'exprimer aussi sous la forme d'une fonction de deux variables séparables suivant respectivement le grand côté et le petit côté de l'ouverture du cornet. Il est alors possible, comme nous allons le voir, de calculer le diagramme de rayonnement de manière analytique, avec l'aide d'une fonction spéciale et du logiciel Mathematica, ou bien de l'obtenir à l'aide d'une transformation dite champ proche champ lointain.

### 2 Antennes étudiées : à lire avant la séance

### 2.1 Rappel sur le guide d'ondes rectangulaire

Dans un guide d'ondes rectangulaire, le premier des modes à se propager est le mode  $TE_{10}$  dont l'allure des lignes du champ électrique et celle de son amplitude sont rappelées sur la figure 2.

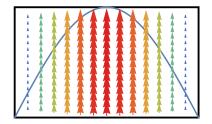




FIGURE 2 – Champ électrique du mode fondamental d'un guide d'ondes rectangulaire de facteur de forme F = 2. L'origine est au centre du rectangle.

Si l'on note  $\eta$  l'impédance d'onde du milieu homogène remplissant le guide (en général de l'air), k la constante de propagation des ondes planes dans ce milieu à la pulsation  $\omega$ ,  $k_c=\frac{\pi}{a}$  la constante de coupure du mode fondamental, l'expression du champ électromagnétique associé au mode fondamental de constante de propagation  $k_g=\sqrt{k^2-k_c^2}$  selon z, dans le rectangle  $-\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}$  et  $-\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2}$ , est alors la suivante :

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E\cos(k_c x)\exp(-\mathrm{j}k_g z) \\ E_z = 0 \end{cases} \begin{cases} H_x = -\frac{Ek_g}{\eta k}\cos(k_c x)\exp(-\mathrm{j}k_g z) \\ H_y = 0 \\ H_z = -\mathrm{j}\frac{Ek_c}{\eta k}\sin(k_c x)\exp(-\mathrm{j}k_g z) \end{cases}$$

On notera que le champ électromagnétique est nul en dehors du rectangle  $-\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}$  et  $-\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2}$ .

### 2.2 Cas d'un tronçon de guide d'ondes sectoriel en plan H

### 2.2.1 Géométrie et mise en équations

On va s'intéresser ici à la propagation dans un tronçon de guide d'ondes sectoriel, construit en évasant le grand côté d'un guide d'ondes rectangulaire, dont le petit côté b reste constant comme le montre la figure 3. Pour cette raison, on l'appelle guide d'ondes sectoriel en plan H, c'est-à-dire s'évasant parallèlement à la direction du champ magnétique. Il commence au rayon  $\rho_h$  et se termine au rayon  $\rho_H$ .

On va en donner une représentation à deux dimensions en vue de dessus sur la figure 4 pour y repérer dans le guide un point M de coordonnées

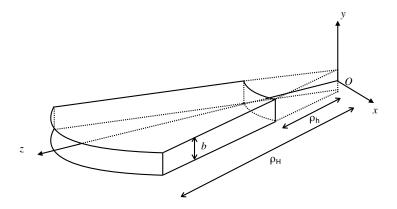


FIGURE 3 – Vue d'un guide d'ondes sectoriel dans le plan H.

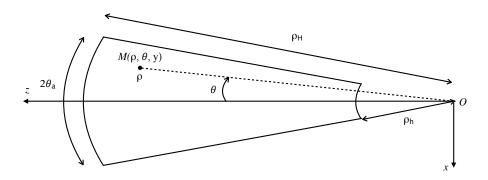


FIGURE 4 – Coordonnées dans un guide d'ondes sectoriel dans le plan H.

cylindriques  $(\rho, \theta, y)$ . Le demi-angle d'ouverture du guide d'ondes a pour valeur angulaire  $\theta_a$ .

On va supposer que le guide est excité de telle sorte que seule la composante  $E_y$  du champ électrique soit non nulle. Le champ électrique va donc s'exprimer sous la forme  $\mathbf{E} = E_y \mathbf{e_y}$ . Il en résulte que :

$$\mathbf{rot}\mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_y}{\partial \theta} \mathbf{e}_{\rho} - \frac{\partial E_y}{\partial \rho} \mathbf{e}_{\theta} = -\mathrm{j}\omega \mu \mathbf{H} = -\mathrm{j}\omega \mu H_{\rho} \mathbf{e}_{\rho} - \mathrm{j}\omega \mu H_{\theta} \mathbf{e}_{\theta}.$$
De plus,  $\mathbf{rot}\mathbf{H} = \mathrm{j}\omega \epsilon \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} (\frac{\partial (\rho H_{\theta})}{\partial \rho} - \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \theta}) \mathbf{e}_{\mathbf{y}} = \mathrm{j}\omega \epsilon E_y \mathbf{e}_{\mathbf{y}}.$ 
En exprimant  $H_{\rho}$  et  $H_{\theta}$  en fonction de  $E_y$ , on obtient une équation aux

dérivées partielles en  $E_y$ :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_y}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial \theta^2} + k^2 E_y = 0 \tag{1}$$

#### 2.2.2 Résolution

Compte tenu de la géométrie du problème, on va en chercher une solution à variables séparables de la forme  $E_y(\rho, \theta) = f(\rho)g(\theta)$ .

Dans le domaine des  $(\rho, \theta)$  pour les quels la composante  $E_y(\rho, \theta)$  est non nulle, on obtient après division par  $f(\rho)g(\theta)$  et multiplication par  $\rho^2$ :

$$\rho^2 \frac{\frac{d^2 f(\rho)}{d\rho^2}}{f(\rho)} + \frac{\rho \frac{d f(\rho)}{d\rho}}{f(\rho)} + k^2 \rho^2 + \frac{\frac{d^2 g(\theta)}{d\theta^2}}{g(\theta)} = 0$$
 (2)

On a donc une équation fonction de deux variables indépendantes,  $\rho$  et  $\theta$  de la forme :

$$F(\rho) + G(\theta) = 0 \tag{3}$$

On en déduit que  $F(\rho)$  est constant et que  $G(\theta)$  vaut l'opposé de cette constante qu'on notera  $\nu^2$ . On a donc à résoudre deux équations séparées respectivement en  $\rho$  et  $\theta$ :

$$\frac{d^2 f(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df(\rho)}{d\rho} + (k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}) f(\rho) = 0$$
 (4)

$$\frac{d^2g(\theta)}{d\theta^2} + \nu^2g(\theta) = 0 \tag{5}$$

les solutions de la deuxième équation sont bien connues :

$$g(\theta) = \alpha_0 \cos(\nu \theta) + \beta_0 \sin(\nu \theta) \tag{6}$$

Pour identifier la solution de la première équation, on pose  $\sigma=k\rho$  d'où la nouvelle équation en  $\sigma$  :

$$\frac{d^2 f(\sigma)}{d\sigma^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{df(\sigma)}{d\sigma} + (1 - \frac{\nu^2}{\sigma^2}) f(\sigma) = 0$$
 (7)

On reconnaît une équation de Bessel d'ordre  $\nu$  dont les solutions sont de la forme :

$$f(\sigma) = \gamma H_{\nu}^{(1)}(\sigma) + \delta H_{\nu}^{(2)}(\sigma) \tag{8}$$

 $H_{\nu}^{(1)}$  étant la fonction de Hankel de première espèce d'ordre  $\nu$  et  $H_{\nu}^{(2)}$  étant la fonction de Hankel de deuxième espèce d'ordre  $\nu$ .

Finalement, la composante  $E_y$  a pour expression :

$$E_{\nu}(\rho,\theta) = (\alpha_0 \cos(\nu\theta) + \beta_0 \sin(\nu\theta))(\gamma_0 H_{\nu}^{(1)}(k\rho) + \delta_0 H_{\nu}^{(2)}(k\rho))$$
(9)

sachant que  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  et  $\delta_0$  sont des constantes à déterminer en fonction des conditions aux limites. Sur les parois latérales du guide sectoriel, on a les conditions aux limites  $E_y(\rho, \theta_a) = 0$  et  $E_y(\rho, -\theta_a) = 0$  car  $E_y$  y est tangent.

On en déduit le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \alpha_0 \cos(\nu \theta_a) + \beta_0 \sin(\nu \theta_a) = 0 \\ -\alpha_0 \cos(\nu \theta_a) + \beta_0 \sin(\nu \theta_a) = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une solution non triviale si son déterminant est nul, soit si  $2\sin(\nu\theta_a)\cos(\nu\theta_a) = 0$ .

On en conclut que  $\nu\theta_a = m\frac{\pi}{2}$  avec m, entier relatif, pair ou impair. Donc pour m impair, on aura  $\beta = 0$  et pour m pair,  $\alpha = 0$ .

De plus, pour  $k\rho \gg 1$ , on a les développements suivants :

$$\begin{cases} H_{\nu}^{(1)}(k\rho) = -\sqrt{\frac{2}{\pi k \rho}} \exp\left[j(k\rho - \frac{1}{4}\pi(2\nu - 3))\right] \\ H_{\nu}^{(2)}(k\rho) = -j\sqrt{\frac{2}{\pi k \rho}} \exp\left[-j(k\rho - \frac{1}{4}\pi(2\nu - 3))\right] \end{cases}$$

On en déduit que la fonction  $H_{\nu}^{(2)}$  est associée à des ondes cylindriques divergentes, se dirigeant vers la sortie du guide d'ondes, alors que la fonction  $H_{\nu}^{(1)}$  correspond à des ondes cylindriques convergeant vers l'origine du guide d'ondes, c'est-à-dire qui seraient réfléchies à la sortie du cornet. On va alors supposer que le cornet qui sera construit à partir de cette section de guide sectoriel est bien adapté, ce qui revient à avoir les expressions suivantes des modes impairs et pairs avec  $\alpha = \alpha_0 \delta_0$  et  $\beta = \beta_0 \delta_0$ :

$$\begin{cases} E_y(\rho,\theta) = \alpha \cos{(\nu_m \theta)} H_{\nu_m}^{(2)}(k\rho) \text{ pour } m \text{ impair} \\ E_y(\rho,\theta) = \beta \sin{(\nu_m \theta)} H_{\nu_m}^{(2)}(k\rho) \text{ pour } m \text{ pair} \end{cases}$$
 avec  $\nu_m = m \frac{\pi}{2\theta_a}$ .

Le mode fondamental correspond à la valeur m=1, soit  $\nu_1=\frac{\pi}{2\theta_a}$ . Ses composantes non nulles ont pour expression :

$$\begin{cases} E_y(\rho,\theta) = \alpha \cos(\nu_1 \theta) H_{\nu_1}^{(2)}(k\rho) \\ H_{\rho}(\rho,\theta) = -j\alpha \frac{\nu_1}{\rho \omega \mu} \sin(\nu_1 \theta) H_{\nu_1}^{(2)}(k\rho) \\ H_{\theta}(\rho,\theta) = \frac{-j\alpha}{\omega \mu} \cos(\nu_1 \theta) \frac{dH_{\nu_1}^{(2)}(k\rho)}{d\rho} \end{cases}$$

À la sortie du guide d'ondes sectoriel, pour  $k\rho\gg 1$ , on peut faire le développement :

$$\begin{cases} H_{\nu_1}^{(2)}(k\rho) \approx -j\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} \exp\left[-j(k\rho - \frac{1}{4}\pi(2\nu_1 - 3))\right] \\ \frac{dH_{\nu_1}^{(2)}(k\rho)}{d\rho} \approx -(1 - j)\frac{(\nu_1 + jk\rho)}{\rho}\sqrt{\frac{1}{\pi k\rho}} \exp\left[-j(k\rho - \frac{1}{2}\pi(1 + \nu_1))\right] \end{cases}$$

On admettra alors que pour  $k\rho \gg 1$  et  $k\rho \gg \nu_1$ :

$$\frac{dH_{\nu_1}^{(2)}(k\rho)}{d\rho} \approx -jkH_{\nu_1}^{(2)}(k\rho)$$
 (10)

Enfin, on négligera  $H_{\rho}$  à cause de la décroissance en  $\frac{1}{\rho}$  qui est en facteur dans ce terme.

On obtient finalement l'expression du champ électromagnétique qui est alors transversal :

$$\begin{cases} E_y(\rho,\theta) = -j\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi k}}\exp\left[j(\frac{1}{4}\pi(2\nu_1 - 3))\right]\cos\left(\nu_1\theta\right)\frac{\exp\left[-jk\rho\right]}{\sqrt{\rho}} \\ H_\theta(\rho,\theta) = jk\alpha\frac{1}{\omega\mu}\sqrt{\frac{2}{\pi k}}\exp\left[j(\frac{1}{4}\pi(2\nu_1 - 3))\right])\cos\left(\nu_1\theta\right)\frac{\exp\left[-jk\rho\right]}{\sqrt{\rho}} \end{cases}$$

ce qui peut être écrit, en posant  $E=-\mathrm{j}\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi k}}\exp{[\mathrm{j}(\frac{1}{4}\pi(2\nu_1-3))]}$ , sous la forme :

$$\begin{cases} E_y(\rho, \theta) = E \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\theta}{\theta_a}\right) \frac{\exp\left[-jk\rho\right]}{\sqrt{\rho}} \\ H_\theta(\rho, \theta) = -\frac{E}{\eta} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\theta}{\theta_a}\right) \frac{\exp\left[-jk\rho\right]}{\sqrt{\rho}} \end{cases}$$

où  $\eta$  est l'impédance d'onde du milieu qui remplit le guide, en général de l'air, d'où  $\eta=\eta_0=120\pi~\Omega.$ 

On a donc une onde cylindrique qui émerge du cornet sectoriel.

### 2.2.3 Application à l'antenne cornet

Alors que l'onde qui se propage dans le guide d'ondes sectoriel est de nature cylindrique, l'ouverture de l'antenne cornet est plane comme le montre la figure 5. On va donc devoir corriger la phase de l'onde cylindrique pour obtenir le champ dans l'ouverture de l'antenne, en supposant négligeable la variation d'amplitude.

En partant des notations de la figure 5, on peut écrire  $\rho = \sqrt{\rho_H^2 + x^2}$ . La distance supplémentaire entre le plan de l'ouverture de l'antenne et le front d'onde cylindrique est simplement :  $\Delta = \rho - \rho_H = \sqrt{\rho_H^2 + x^2} - \rho_H = \rho_H (\sqrt{1 + (\frac{x}{\rho_H})^2} - 1)$ . Dans le cas où  $\rho_H \gg x$ , on a l'approximation :

$$\Delta \approx \rho_H (1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\rho_H}\right)^2 - 1) = \frac{1}{2} \frac{x^2}{\rho_H}$$
 (11)

De plus, on peut alors faire l'approximation supplémentaire  $\frac{\theta}{\theta_a} \approx 2x/A$  où A est la longueur de l'ouverture du cornet.

Il en découle l'expression finale des composantes cartésiennes du champ électromagnétique transversal dans l'ouverture qui sont de la forme :

$$\begin{cases} E_y(x,y) \propto \frac{\exp\left[-jk\rho_H\right]}{\sqrt{\rho_H}}\cos\left(\pi\frac{x}{A}\right)\exp\left[-j\frac{k}{2}\frac{x^2}{\rho_H}\right] \\ H_x(x,y) \propto -\frac{1}{\eta}\frac{\exp\left[-jk\rho_H\right]}{\sqrt{\rho_H}}\cos\left(\pi\frac{x}{A}\right)\exp\left[-j\frac{k}{2}\frac{x^2}{\rho_H}\right] \end{cases}$$

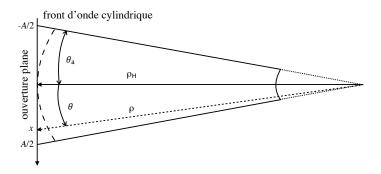


FIGURE 5 – Ouverture plane du cornet et front de l'onde cylindrique incidente.

### 2.3 Cas d'un tronçon de guide d'ondes sectoriel en plan E

### 2.3.1 Géométrie

On s'intéresse ici à la propagation dans un tronçon de guide d'ondes sectoriel, construit en évasant le petit côté d'un guide d'ondes rectangulaire, dont le grand côté a reste constant comme le montre la figure 6. Pour cette

raison, on l'appelle guide d'ondes sectoriel en plan E. Il commence au rayon  $\rho_e$  et se termine au rayon  $\rho_E$ .

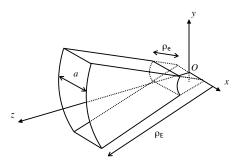


FIGURE 6 – Vue d'un guide d'ondes sectoriel dans le plan E.

### 2.3.2 Application à une antenne cornet sectorielle en plan E

On admettra, sans refaire des calculs analogues à ceux menés dans le cas d'un cornet sectoriel en plan H que les composantes cartésiennes du champ électromagnétique transversal dans l'ouverture ont pour expressions, dans le cas d'un cornet sectoriel en plan E :

$$\begin{cases} E_y(x,y) \propto \frac{\exp\left[-jk\rho_E\right]}{\sqrt{\rho_E}}\cos\left(\pi\frac{x}{A}\right)\exp\left[-j\frac{k}{2}\frac{y^2}{\rho_E}\right] \\ H_x(x,y) \propto -\frac{1}{\eta}\frac{\exp\left[-jk\rho_E\right]}{\sqrt{\rho_E}}\cos\left(\pi\frac{x}{A}\right)\exp\left[-j\frac{k}{2}\frac{y^2}{\rho_E}\right] \end{cases}$$

### 2.4 Cas d'une antenne cornet pyramidale

Il s'agit de l'antenne qui est décrite la figure 1. Elle présente un évasement dans les deux directions du grand côté a et du petit côté b d'un guide d'ondes rectangulaire avec des rayons  $\rho_H$  et  $\rho_E$ , respectivement. Dans ce cas, on admettra que les composantes cartésiennes du champ électromagnétique transversal dans l'ouverture ont assez intuitivement pour expressions :

$$\begin{cases} E_y(x,y) = E\cos(\pi \frac{x}{A})\exp\left[-j\frac{k}{2}(\frac{x^2}{\rho_H} + \frac{y^2}{\rho_E})\right] \\ H_x(x,y) = -\frac{E}{\eta}\cos(\pi \frac{x}{A})\exp\left[-j\frac{k}{2}(\frac{x^2}{\rho_H} + \frac{y^2}{\rho_E})\right] \end{cases}$$

avec E la valeur du champ électrique au centre de l'ouverture de l'antenne et A la longueur de l'ouverture du cornet, B étant sa largeur.

Elles sont nulles en dehors de l'ouverture pour  $|x| > \frac{A}{2}$  ou  $|y| > \frac{B}{2}$ .

# 3 Calcul du champ électromagnétique rayonné : à lire avant la séance

### 3.1 Par le théorème de Huygens

### 3.1.1 Principe

On va appliquer directement le principe de Huygens à l'antenne cornet pyramidale en faisant rayonner les courants équivalents à la distribution du champ électromagnétique dans l'ouverture de l'antenne, de natures électrique  $\mathbf{J_s} = \mathbf{e_z} \times (H_x \mathbf{e_x}) = H_x \mathbf{e_y}$  et magnétique  $\mathbf{M_s} = (E_y \mathbf{e_y}) \times \mathbf{e_z} = E_y \mathbf{e_x}$ , comme le montre la figure 7 :

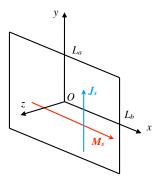


FIGURE 7 – Ouverture rayonnante de l'antenne cornet pyramidale.

On en déduit les expressions de ces courants équivalents :

$$\begin{cases} \mathbf{J_s}(x,y) = -\frac{E}{\eta}\cos{(\pi\frac{x}{A})}\exp{[-\mathrm{j}\frac{k}{2}(\frac{x^2}{\rho_H} + \frac{y^2}{\rho_E})]}\mathbf{e_y} \\ \mathbf{M_s}(x,y) = E\cos{(\pi\frac{x}{A})}\exp{[-\mathrm{j}\frac{k}{2}(\frac{x^2}{\rho_H} + \frac{y^2}{\rho_E})]}\mathbf{e_x} \end{cases}$$

### 3.1.2 Calcul du champ rayonné

Le champ électrique rayonné par l'ouverture de surface  $S_a$  a pour expression :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{j}k\eta}{4\pi} \frac{\exp\left(-\mathrm{j}kr\right)}{r} \iint_{S_{\sigma}} (\mathbf{J_s} \times \mathbf{u} - \frac{\mathbf{M_s}}{\eta}) \times \mathbf{u} \exp\left(\mathrm{j}k\mathbf{u}.\mathbf{r}'\right) d\mathbf{r}'$$
(12)

ce qu'on peut encore écrire sous la forme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{jk\eta}{4\pi} \frac{\exp(-jkr)}{r} \iint_{S_a} (H_x \mathbf{e_y} \times \mathbf{u} - \frac{E_y}{\eta} \mathbf{e_x}) \times \mathbf{u} \exp(jk\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (13)$$

On rappelle que:

$$\begin{cases} \mathbf{e_x} = \sin\theta\cos\phi\mathbf{u} + \cos\theta\cos\phi\mathbf{e_{\theta}} - \sin\phi\mathbf{e_{\phi}} \\ \mathbf{e_y} = \sin\theta\sin\phi\mathbf{u} + \cos\theta\sin\phi\mathbf{e_{\theta}} + \cos\phi\mathbf{e_{\phi}} \\ \mathbf{u} = \sin\theta\cos\phi\mathbf{e_x} + \sin\theta\sin\phi\mathbf{e_y} + \cos\theta\mathbf{e_z} \end{cases}$$

Par ailleurs, 
$$H_x(x,y) = -\frac{E_y(x,y)}{\eta}$$
, d'où

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{j}k\eta}{4\pi} \frac{\exp\left(-\mathrm{j}kr\right)}{r} \iint_{S_a} \left(-\frac{E_y(x',y')}{\eta}\right) (\mathbf{e}_{\mathbf{y}} \times \mathbf{u} + \mathbf{e}_{\mathbf{x}}) \times \mathbf{u} \exp\left(\mathrm{j}k\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}'\right) dx' dy'$$
(14)

De plus  $(\mathbf{e_y} \times \mathbf{u} + \mathbf{e_x}) \times \mathbf{u} = -(1 + \cos \theta)(\sin \phi \mathbf{e_\theta} + \cos \phi \mathbf{e_\phi}).$ 

On a donc à calculer  $I=\iint_{S_a}E_y(x',y')\exp{(jk\sin{\theta(x'\cos{\phi}+y'\sin{\phi})})}dx'dy'$  de telle sorte que :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{j}k}{4\pi} (1 + \cos\theta) (\sin\phi \mathbf{e}_{\theta} + \cos\phi \mathbf{e}_{\phi}) \frac{\exp(-\mathrm{j}kr)}{r} I \tag{15}$$

On pourra ensuite en représenter le diagramme de rayonnement dans les plans E (contenant le champ électrique de l'ouverture) et H (orthogonal au plan E).

### 3.2 Par une transformation champ proche-champ lointain

### 3.2.1 Principe théorique

L'idée est ici de décomposer le champ sur l'ouverture  $S_a$  en spectre d'ondes planes et de propager ces ondes planes à grande distance pour reconstruire le champ lointain. Pour cela, on part de l'équation de propagation en dehors des sources :

$$\Delta \mathbf{E}(x, y, z) + k^2 \mathbf{E}(x, y, z) = 0 \tag{16}$$

En prenant la transformée de Fourier suivant les variables x et y, on obtient :

$$\tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(x, y, z) \exp\left[j(k_x x + k_y y)\right] dx dy$$
 (17)

avec la condition  $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$ .

On a alors la transformée inverse :

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y, z) \exp\left[-j(k_x x + k_y y)\right] dk_x dk_y \qquad (18)$$

qui, reportée dans l'équation de propagation initiale, permet d'écrire l'équation de propagation sous la forme spectrale :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y, z)}{\partial z^2} + k_z^2 \tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y, z) = 0$$
(19)

En supposant que  $k_z > 0$ , cette équation admet une solution se propageant dans la direction des z croissants sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y, z) = \tilde{\mathbf{A}}(k_x, k_y) \exp\left[-jk_z z\right]$$
(20)

On appelle spectre d'ondes planes du champ électrique la fonction  $\tilde{\mathbf{A}}(k_x, k_y)$ .

On peut ainsi reconstruire  $\mathbf{E}(x,y,z)$  à partir de son spectre à l'aide de la relation :

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{A}}(k_x,k_y) \exp\left[-\mathrm{j}(k_x x + k_y y + k_z z)\right] dk_x dk_y \quad (21)$$

De plus, en dehors des sources, on sait que div $\mathbf{E}=0$  que l'on traduit avec la relation précédente. On en déduit que  $k_x\tilde{A}_x+k_y\tilde{A}_y+k_z\tilde{A}_z=0$ .

On pose alors 
$$\tilde{\mathbf{A}}(k_x, k_y) = \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{t}}(k_x, k_y) + \tilde{A}_z(k_x, k_y)\mathbf{e}_{\mathbf{z}}$$
 et  $\mathbf{k}_{\mathbf{t}} = k_x \mathbf{e}_{\mathbf{x}} + k_y \mathbf{e}_{\mathbf{y}}$ .

Comme  $\tilde{\mathbf{A}}.(\mathbf{k_t} + k_z \mathbf{e_z}) = 0$ , il en résulte que :

$$\tilde{A}_z(k_x, k_y) = -\frac{\mathbf{k_t}.\tilde{\mathbf{A}_t}(k_x, k_y)}{k_z}$$
(22)

De plus, si l'on se place en z=0 (dans le plan de l'ouverture), on obtient :

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{t}}(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{t}}(x, y, 0) \exp\left[j(k_x x + k_y y)\right] dx dy \tag{23}$$

où  $\mathbf{E_t}(x, y, 0)$  est le champ électrique transversal dans l'ouverture.

On peut donc conclure que, connaissant le champ électrique transversal dans l'ouverture  $\mathbf{E_t}(x,y,0)$ , il est possible de calculer par transformation de Fourier à deux dimensions  $\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{t}}(k_x,k_y)$ , puis  $\tilde{A}_z(k_x,k_y)$  donc finalement  $\tilde{\mathbf{A}}(k_x,k_y)$ , à partir duquel on peut déterminer  $\mathbf{E}(x,y,z)$  pour  $z \geq 0$ .

On peut noter aussi que dans l'expression 21, pour  $k_x^2 + k_y^2 > k^2$ , la variable  $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$  devient imaginaire pure, ce qui correspond à la présence d'ondes évanescentes suivant z, à proximité de l'ouverture.

Enfin, pour  $k_z z \gg 1$ , on admettra que l'expression 21 prend la forme asymptotique suivante dans le repère sphérique :

$$\mathbf{E}(r,\theta,\phi) = \mathrm{j}k\cos\theta \frac{\exp\left[-\mathrm{j}kr\right]}{r}\tilde{\mathbf{A}}(k\sin\theta\cos\phi, k\sin\theta\sin\phi) \tag{24}$$

Le champ électrique lointain rayonné est donc proportionnel au spectre d'ondes planes du champ proche dans l'ouverture de l'antenne, limité au domaine visible, c'est-à-dire pour lequel  $k_x^2 + k_y^2 \le k^2$ , ce qui correspond à des ondes planes propagées. Les ondes évanescentes ont disparu à grande distance et n'apparaissent pas dans le champ lointain.

Pour déterminer  $\tilde{\mathbf{A}}$ , on calculera tout d'abord  $\tilde{A}_z$  grâce à l'équation 22, puis on passera de  $(\tilde{A}_x, \tilde{A}_y, \tilde{A}_z)$  dans le repère cartésien à  $(\tilde{A}_r, \tilde{A}_\theta, \tilde{A}_\phi)$  dans le repère sphérique en effectuant un changement de repère de cartésien à sphérique.

#### 3.2.2 Mise en œuvre

Pour mettre en œuvre ce principe, il faut mesurer le champ électrique proche transversal  $\mathbf{E_t}(x,y,0)$  dans un plan (P) proche de l'antenne. Pour cela, on est contraint de l'échantillonner avec un pas  $\Delta x$  suivant l'axe des x et un pas  $\Delta y$  suivant l'axe des y. C'est le support spectral selon  $k_x$  ou  $k_y$  qui va permettre de déterminer ces pas d'échantillonnage. On va définir des valeurs limites  $k_{xm} \geq k > 0$  et  $k_{ym} \geq k > 0$  telles que pour

$$\begin{cases} |k_x| \ge k_{xm} \\ |k_y| \ge k_{ym} \end{cases}$$

on ait  $\tilde{\mathbf{A}}(k_x, k_y) \approx \mathbf{0}$ . Les pas d'échantillonnage correspondants seront donc les suivants :

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{2\pi}{2k_{xm}} = \frac{\pi}{k_{xm}} \\ \Delta y = \frac{2\pi}{2k_{ym}} = \frac{\pi}{k_{ym}} \end{cases}$$

On prendra, dans le plan de mesure, M échantillons suivant x et N échantillons suivant y.

Par application du théorème de Shannon, le champ électrique transversal pourrait formellement être reconstruit à l'aide de la relation :

$$\mathbf{E_{t}}(x,y,0) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{E_{t}}(m\Delta x, n\Delta y, 0) \frac{\sin(k_{xm}x - m\pi)}{(k_{xm}x - m\pi)} \frac{\sin(k_{ym}y - n\pi)}{(k_{ym}y - n\pi)}$$
(25)

Cela n'est pas la manière la plus efficace de la reconstruire.

Suivant la distance  $z_0$  du plan de mesure (P) à l'ouverture de l'antenne située en z=0, on prendra en compte de manière plus ou moins importante les ondes évanescentes.

Si le plan (P) est suffisamment éloigné de l'antenne, on ne mesurera plus d'ondes évanescentes en échantillonnant le champ électrique transversal  $\mathbf{E_t}(x,y,0)$ . On aura alors  $k_x^2 + k_y^2 \leq k^2$ . Dans ces conditions, si  $\lambda$  est la longueur d'onde dans l'air, on aura la relation :

$$\begin{cases} k_{xm} = k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ k_{ym} = k = \frac{2\pi}{\lambda} \end{cases}$$

Il en résulte que :

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2} \\ \Delta y = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

C'est la valeur maximale des pas d'échantillonnage. Si l'on se rapproche de l'antenne, il y aura davantage d'ondes évanescentes, et les pas d'échantillonnage devront être réduits en conséquence. La capacité de mesurer correctement ces ondes évanescentes est liée à la dynamique de l'appareil de mesure. On peut l'apprécier qualitativement. Soit  $D_{dB}$  cette dynamique. On s'intéresse à des ondes évanescentes ce qui revient à avoir  $k_z = -\mathrm{j}\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}$ .

Par ailleurs, on va choisir d'avoir  $k_{xm}=k_{ym}=k_m$ . Dans le plan de mesure situé en  $z=z_0$ , ces ondes sont atténuées de  $\exp\left[z_0\sqrt{k_x^2+k_y^2-k^2}\right]$  avec  $2k_m^2 \geq k_x^2+k_y^2 \geq k^2$ . L'atténuation la plus importante sera obtenue pour  $k_x=k_m$  et  $k_y=k_m$ . Elle a pour valeur, exprimée en dB:

$$\alpha_{\text{max}} = 20 \log_{10} \left( \exp\left[ z_0 \sqrt{2k_m^2 - k^2} \right] \right) = z_0 \frac{20}{\ln 10} \sqrt{2k_m^2 - k^2}$$
 (26)

C'est cette valeur qu'il conviendra de comparer à la dynamique de mesure  $D_{dB}$  sachant qu'on devra échantillonner le champ électrique avec des pas  $\Delta x = \frac{\pi}{k_m} = \Delta s$  et  $\Delta y = \frac{\pi}{k_m} = \Delta s$  avec  $\Delta s = \frac{\pi}{k_m}$ .

Pour une distance du plan de mesure au plan de l'ouverture donnée qu'on exprimera sous la forme  $z_0 = p\lambda$  et une dynamique  $D_{dB}$  donnée, on peut déterminer le pas d'échantillonnage nécessaire  $\Delta s$  qu'on exprimera sous la forme  $\Delta s = q\lambda$ . On a alors, en effet :

$$D_{dB} = p\lambda \frac{20}{\ln 10} \sqrt{2(\frac{\pi}{q\lambda})^2 - k^2} = 8.68p\lambda \sqrt{2(\frac{\pi}{q\lambda})^2 - (\frac{2\pi}{\lambda})^2}$$
 (27)

On en déduit  $D_{dB}=\frac{20}{\ln 10}p\pi\sqrt{\frac{2}{q^2}-4}$  d'où il résulte que :

$$q = \frac{20\sqrt{2}p\pi}{\sqrt{(\ln 10)^2 (D_{dB})^2 + 1600p^2\pi^2}}$$
 (28)

On a représenté sur la figure 8 la relation entre q et p pour différentes dynamiques de mesure.

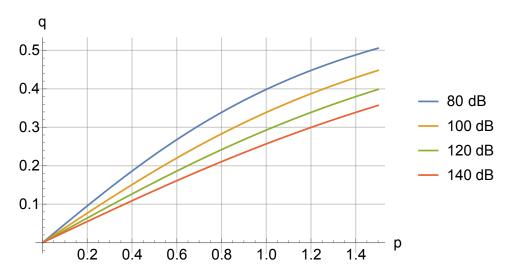


FIGURE 8 – Relation entre le pas d'échantillonnage et la distance de mesure pour une dynamique donnée.

Théoriquement, plus la dynamique est élevée, meilleure est la capacité de l'appareil de mesure à réaliser l'acquisition des ondes évanescentes à une distance donnée, ce qui impose un pas d'échantillonnage réduit par rapport au maximum qui correspond à q=0.5.

Cependant, plus la sonde de mesure du champ est proche de l'antenne, plus elle perturbe le champ rayonné. On peut s'en affranchir en effectuant une correction de sonde qui dépasse le cadre de ces travaux pratiques [3]. Dans le cas général, un compromis est nécessaire entre le choix de la distance de mesure et celui du pas d'échantillonnage.

### 4 Travail à effectuer sur place : simulation

Elle va se faire avec Mathematica. Il est recommandé que chaque binôme gère son propre notebook, respecte sa mise en forme et le commente abondamment, et de manière pertinente.

Ce notebook servira de copie et sera à adresser en format .nb et en format .pdf à l'adresse suivante : marc.helier@sorbonne-universite.fr

Pour faire apparaître le menu de choix des niveaux de style, aller dans le menu Window article "Toolbar → Formatting". Avec le style "Author" dans ce menu, n'oubliez pas d'insérer vos noms après le titre du notebook.

Pensez à sauvegarder régulièrement votre travail.

### 4.1 Étude des fonctions de Hankel

Exécuter, dans Mathematica, la commande :

?HankelH1

Cliquer sur >> et consulter la page de référence. Faire de même avec la commande :

?HankelH2

Exécuter maintenant, dans Mathematica, la commande :

HankelH1[nu,z]+HankelH2[nu,z]//FullSimplify

puis la commande :

HankelH1[nu,z]-HankelH2[nu,z]//FullSimplify

Exécuter ensuite, dans Mathematica, la commande :

?BesselJ

Cliquer sur >> et consulter la page de référence.

Exécuter enfin, dans Mathematica, la commande :

?BesselY

Cliquer sur >> et consulter la page de référence.

On va maintenant revoir la résolution de l'équation différentielle en  $\rho$  caractérisant la propagation dans un guide d'ondes sectoriel. Pour cela, exécuter dans Mathematica :

```
DSolve[f''[rho]+f'[rho]/rho+(k^2-nu^2/rho^2)*f[rho]==0,f[rho],rho]

puis exécuter la commande :
```

```
 \begin{aligned} & DSolve[f''[rho]+f'[rho]/rho+(k^2-nu^2/rho^2)*f[rho]==0,f[rho],rho] \ /. \\ & \{BesselJ[nu_,z_]->(HankelH1[nu,z]+HankelH2[nu,z])/2, \\ & BesselY[nu_,z_]->(HankelH1[nu,z]-HankelH2[nu,z])/(2*I)\}//Simplify \end{aligned}
```

Conclure par rapport à la solution donnée par l'expression 8.

Maintenant, on va s'intéresser au comportement asymptotique des fonctions de Hankel. Pour cela, exécuter dans Mathematica la commande :

```
Series[HankelH1[nu,k*rho],{rho,Infinity,1},Assumptions->{k>0}]
puis la commande :
```

```
Series[HankelH2[nu,k*rho],{rho,Infinity,1},Assumptions->{k>0}]
```

Quelle différence y a-t-il entre les deux développements?

Maintenant, il s'agit de vérifier numériquement l'approximation utilisée dans l'équation 10. Pour cela, exécuter la commande :

```
D[HankelH2[nu, k*rho], rho]
```

On va fixer  $\theta_a=20^\circ$ . En déduire la commande qui suit et en expliquer le sens :

```
Plot[{Abs[1/2 k (HankelH2[-1+nu,k*rho]-HankelH2[1+nu,k*rho]) /. {nu->9/2, k->2*Pi*2.45*10^9/(3*10^8)}],
    Abs[-I*k*HankelH2[nu,k*rho] /. {nu->9/2, k->2*Pi*2.45*10^9/(3*10^8)}]}, {rho,0.05,0.4}]
```

Que pouvez-vous en conclure?

## 4.2 Calcul du champ électrique lointain rayonné par le principe de Huygens

Pour commencer, il va s'agir de calculer l'intégrale I qui figure dans l'expression 15.

Elle se décompose en un produit de deux intégrales simples  $I_x$  et  $I_y$  et d'une amplitude E en V/m.

$$\begin{cases} I_{x} = \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \cos(\pi \frac{x'}{A}) \exp\left[-jk(\frac{x'^{2}}{2\rho_{H}} - x' \sin\theta \cos\phi)\right] dx' \\ I_{y} = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \exp\left[-jk(\frac{y'^{2}}{2\rho_{E}} - y' \sin\theta \sin\phi)\right] dy' \end{cases}$$

Pour calculer le diagramme de rayonnement, construire d'abord deux fonctions dans Mathematica :

- une fonction de  $\theta$ ,  $\phi$ , A (noté wA),  $\rho_H$  et k définie par  $I_x$ ;
- une fonction de  $\theta$ ,  $\phi$ , B (noté wB),  $\rho_E$  et k définie par  $I_q$ ;

Pour définir ces fonctions, on utilisera l'affectation immédiate (signe =) et non l'affectation différée (signe :=) pour éviter le calcul des intégrales à chaque appel de ces fonctions.

Ensuite, construire deux fonctions de  $\theta$ ,  $\phi$ , wA,  $\rho_H$ , wB,  $\rho_E$  et k définies à partir de l'expression 15, l'une donnant le champ électrique polarisé suivant  $\mathbf{e}_{\theta}$ , l'autre suivant  $\mathbf{e}_{\phi}$ .

Utiliser la fonction « d'ébasage » fournie pour représenter les diagrammes de rayonnement en décibels avec une dynamique ajustable en dB.

Pour les données suivantes, A=264 mm, B=204 mm,  $\rho_H=356$  mm,  $\rho_E=305$  mm, représenter les diagrammes de rayonnement normés à 0 dB en plan E et en plan H, avec une dynamique de 30 dB, pour  $\theta$  variant entre  $-90^{\circ}$  et  $90^{\circ}$ , pour les fréquences de 2 GHz, 2.4 GHz, 2.8 GHz, 3.2 GHz, 3.6 GHz et 4 GHz.

Les comparer aux diagrammes de rayonnement, donnés par le fabricant de l'antenne A-INFO, du cornet de gain nominal 15 dB dans la bande 2-4 GHz et aux résultats de mesure disponibles.

### 4.3 Calcul du champ électrique lointain rayonné par transformation champ proche champ lointain

### — Cas continu:

Il s'agit maintenant de déterminer le spectre d'ondes planes du champ dans l'ouverture du cornet pyramidal et d'en déduire le champ électrique lointain et donc de calculer le diagramme de rayonnement de l'antenne en plan H (composante  $E_{\phi}(\theta,0)$ ) et en plan E (composante  $E_{\theta}(\theta,\frac{\pi}{2})$ ).

On déduira ces deux composantes respectivement des composantes  $\tilde{A}_{\phi}$  et  $\tilde{A}_{\theta}$  du spectre du champ proche par la formule 24, après passage des composantes cartésiennes aux composantes sphériques.

Pour cela, il faut tout d'abord définir dans Mathematica une fonction de x, y, A (noté wA),  $\rho_H$ , B (noté wB),  $\rho_E$ , k,  $e_0$  (qui représentera l'amplitude E) qui décrive le champ électrique dans l'ouverture de l'antenne cornet. Il faudra ne faudra pas oublier que le champ électrique est nul en dehors de l'ouverture.

```
On appellera cette fonction: ecor[x_, y_, wA_, rhoH_, wB_, rhoE_, k_, e0_].
```

Il s'agit ensuite de calculer formellement sa transformée de Fourier en x et en y (correspondant aux variables spectrales  $k_x$  et  $k_y$ ) qu'on notera spectrumcor [kx\_, ky\_, wA\_, rhoH\_, wB\_, rhoE\_, k\_, e0\_] en exécutant la commande :

```
spectrumcor[kx_, ky_, wA_, rhoH_, wB_, rhoE_, k_, e0_] =
FullSimplify[FourierTransform[ecor[x, y, wA, rhoH,
  wB, rhoE, k, e0], {x, y}, {kx, ky}],
  Assumptions -> {wA > 0, wB > 0, rhoH > 0, rhoE > 0, k > 0}]
```

On pourra ensuite obtenir directement le champ lointain en plan H puis en plan E, en s'aidant de la fonction :

```
farfieldcorH[theta_, phi_, wA_, rhoH_, wB_, rhoE_, k_, e0_] :=
  I*k*Cos[theta]*spectrumcor[k*Cos[phi]*Sin[theta],
  k*Sin[phi]*Sin[theta], wA, rhoH, wB, rhoE, k, e0]
```

ou de la fonction :

```
farfieldcorE[theta_, phi_, wA_, rhoH_, wB_, rhoE_, k_, e0_] :=
I*k*spectrumcor[k*Cos[phi]*Sin[theta],
k*Sin[phi]*Sin[theta], wA, rhoH, wB, rhoE, k, e0]
```

Pour les données suivantes, A=264 mm, B=204 mm,  $\rho_H=356$  mm,  $\rho_E=305$  mm, représenter les diagrammes de rayonnement normés à 0 dB en plan E et en plan H, avec une dynamique de 30 dB, pour  $\theta$  variant entre  $-90^{\circ}$  et  $90^{\circ}$ , pour les fréquences de 2 GHz, 2.4 GHz, 2.8 GHz, 3.2 GHz, 3.6 GHz et 4 GHz.

Les comparer aux diagrammes de rayonnement obtenus avec le principe de Huygens et commenter les résultats obtenus.

### — Cas discret : initiation

Il s'agit ici de se familiariser avec la transformée de Fourier discrète dans Mathematica. On va travailler sur une fonction de test, fonction d'une variable x et d'un paramètre réel positif a, définie ainsi :

$$test[x_, a_] := UnitBox[x/a]*Cos[Pi*x/a]$$

Il s'agit tout d'abord d'en calculer et d'en définir la transformée de Fourier en  $k_x$ , à l'aide de la commande :

```
testSpect[kx_, a_] = FullSimplify[
  FourierTransform[test[x, a], x, kx, FourierParameters -> {0, 1}],
  Assumptions -> {a > 0}]
```

On peut chercher les zéros en  $k_x$  de ce spectre en exécutant la commande :

On notera  $k_{x0}$  le premier zéro positif de ce spectre, à partir de l'origine. Pour a = 1, représenter la fonction test[x, 1] et le module de son spectre entre  $-3k_{x0}$  et  $3k_{x0}$ .

On va borner ensuite ce spectre entre  $-k_{x0}$  et  $k_{x0}$ . On en déduit le pas spatial maximal possible pour échantillonner la fonction test [x, 1].

C'est 
$$\Delta x_{\text{max}} = \frac{\pi}{k_{x0}}$$
.

En pratique, on va utiliser un pas  $\Delta x = \frac{\Delta x_{\text{max}}}{s}$ , avec  $s \ge 1$ .

On va échantillonner la fonction  $\mathsf{test}[\mathtt{x},\ 1]$  avec un nombre impair de points  $N_x = 2^n + 1$  sur un intervalle allant  $x_{\min} = -\frac{N_x - 1}{2} \Delta x$  à

 $x_{\max} = \frac{N_x - 1}{2} \Delta x$ , le choix d'un nombre de points impair permettant d'inclure l'origine dans l'échantillonnage. Il est conseillé de faire un dessin au brouillon.

Construire alors une liste datax de  $N_x$  points  $x_i$  régulièrement espacés de  $\Delta x$ , allant de  $x_{\min}$  à  $x_{\max}$ , et une liste datay des test[ $x_i$ ,1].

Représenter datay avec la commande de tracé jointif d'une liste de points ListLinePlot[datay, PlotRange -> All].

Calculer la transformée de Fourier discrète normée de datay, notée dataFoury en exécutant la commande :

```
dataFoury =
  RotateLeft[Fourier[datay, FourierParameters -> {0, 1}],
  (nX + 1)/2]*Sqrt[nX]*stepx/Sqrt[2*Pi];
```

où stepx n'est autre que  $\Delta x$  et nX l'entier  $N_x$ . On notera bien le coefficient de normalisation en  $\sqrt{N_x}\Delta x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  et la rotation des données de  $\frac{N_x+1}{2}$  valeurs.

Construire ensuite une liste data Fourx de  $N_x$  points  $k_{xi}$  régulièrement espacés, all ant de  $\frac{-\pi}{\Delta_x}$  à  $\frac{\pi}{\Delta_x}$ .

Représenter alors le module du spectre échantillonné obtenu à l'aide de la commande :

ListLinePlot[Table[{dataFourx[[i]], dataFoury[[i]] // Abs},
{i, 1, nX}], PlotRange -> All]

Le comparer au spectre exact obtenu à l'aide du module de la fonction testSpect[kx, 1].

Étudier l'influence du paramètre s et du nombre (impair) de points  $N_x$ .

— Travail facultatif: appliquer cette approche à l'antenne cornet

### 5 Travail à effectuer sur place : caractérisation expérimentale

### 5.1 Matériel et logiciels disponibles

La caractérisation expérimentale des antennes va être effectuée dans la chambre anéchoïque de Saint-Cyr-l'École. C'est une chambre professionnelle construite par la société Siepel dont le coût est d'environ 250 000 euros (hors taxes).

Ses dimensions extérieures sont de 10 m de longueur par 4,40 m de largeur et par 4,40 m de hauteur environ. Ses dimensions intérieures utiles sont de 8,8 m de longueur, 3 m de largeur et 3 m de hauteur. Cette chambre est actuellement équipée d'un plateau tournant commandé par ordinateur.

Les mesures sont effectuées à l'aide d'un analyseur de réseau Keysight N5222A à quatre accès fonctionnant de 10 MHz jusqu'à 26,5 GHz d'un coût d'environ 90 000 euros.

L'acquisition du champ électrique est obtenue à l'aide d'une sonde électrooptique *enprobe* d'un coût de 17 000 euros conçue et étalonnée pour fonctionner entre 6 MHz et 3 GHz. L'antenne que vous allez caractériser coûte 2 000 euros. Enfin, un simple câble de 4 m utilisé à ces fréquences coûte de l'ordre de 5 00 euros.

Il vous est donc recommandé d'utiliser ces équipements avec le plus grand soin et de poser des questions aux enseignants-chercheurs qui vous encadrent en cas de doute.

Par ailleurs, l'analyseur de réseau est piloté par l'intermédiaire d'un PC intégré qui offre de multiples fonctions à travers un logiciel spécialisé.

L'acquisition du champ électrique par la sonde et l'analyseur se fera par l'intermédiaire d'un logiciel de pilotage de l'analyseur de réseau et du plateau tournant écrit en langage Python et fonctionnant dans l'environnement du projet Jupyter (http://jupyter.org).

Enfin, le traitement des fichiers de données de mesure sera effectué à l'aide de fonctions déjà programmées et commentées dans un notebook Mathematica.

Les explications utiles pour l'emploi de ces logiciels vous seront données sur place, pendant la séance de travaux pratiques.

### 5.2 Étalonnage de l'analyseur de réseau

Avant toute mesure, il est nécessaire de procéder à l'étalonnage de l'analyseur de réseaux (*calibration* en anglais). Vous allez l'effectuer avec l'un des responsables de la séance de travaux pratiques.

Vous manipulerez très soigneusement les charges du kit d'étalonnage (calibration kit). Pour visser une charge, utiliser la clé dynamométrique et ne jamais faire tourner les charges par rapport au câble, mais visser la bague écrou du connecteur mâle de façon à obtenir la connexion par un mouvement de translation, et non de rotation.

Effectuer un étalonnage à deux accès (*two-ports* en anglais) sur une bande de fréquences allant de 1,8 GHz à 2,8 GHz avec 201 points en fréquence. Le sauvegarder dans l'analyseur en lui donnant un nom unique (y inclure la date et l'heure).

Il est conseillé de régler la puissance émise par l'analyseur de réseau à  $15~\mathrm{dB_m}$  pour obtenir un bon rapport signal sur bruit et la bande passante du filtre de fréquence intermédiaire à 10 kHz. Différentes valeurs de puissance et de bande passante pourront être néanmoins expérimentées, puis ajustées en fonction de la qualité des mesures effectuées.

### 5.3 Adaptation de l'antenne

Placer l'antenne sur son support dans la chambre anéchoïque, tourné dans la direction  $0^{\circ}$  vers le fond de la chambre (régler d'abord l'angle du plateau tournant si nécessaire), puis la connecter à l'analyseur de réseau avec le câble issu de l'accès n° 1 (port 1) en serrant les connecteurs avec la clé dynamométrique. Refermer la porte de la chambre anéchoïque, puis relever le module du paramètre  $S_{11}$  en dB de 1,8 GHz à 2,8 GHz. Sauvegarder les mesures et conclure sur l'adaptation de l'antenne dans sa bande de fonctionnement. Que se passe-t-il aux fréquences inférieures à 2 GHz?

Faire afficher le taux d'ondes stationnaires par l'analyseur de réseaux et le comparer au relevé du fabricant de l'antenne entre 2 et 2,8 GHz.

### 5.4 Caractérisation de l'antenne en champ lointain

Le champ lointain d'une antenne surfacique est situé à une distance de celle-ci de l'ordre de  $2\frac{D^2}{\lambda}$  où D est la plus grande dimension de la partie rayonnante de l'antenne et  $\lambda$  la longueur d'onde.

En prenant pour D la diagonale de l'ouverture de l'antenne cornet, calculer les distances minimales de champ lointain dans la bande 1,8 GHz-2,8 GHz.

On s'assurera ensuite du bon positionnement de la sonde électro-optique par rapport à l'antenne cornet à l'aide du système de pointage laser disponible. On fera très attention à ne jamais regarder directement le faisceau laser.

### 5.4.1 En plan H: polarisation principale

L'antenne est toujours placée sur son support dans la chambre anéchoïque, le grand côté du cornet étant horizontal. L'antenne est connectée à l'analyseur de réseau avec le câble issu de l'accès n° 1 (port 1). Le boîtier de la sonde de mesure électro-optique est connecté à l'analyseur avec le câble issu de l'accès n° 2 (port 2). Placer le support de la sonde de mesure en fond de chambre sur son trépied en zone de champ lointain de l'antenne. Ne pas tirer brutalement sur la fibre optique et la laisser se dérouler naturellement (réduire doucement la torsion due aux tours de la fibre) pour aller jusqu'au trépied. Installer la sonde sur son support de telle sorte à mesurer un champ électrique vertical. S'assurer qu'une rotation de l'antenne de  $\pm 90^{\circ}$ par rapport à l'axe de la chambre ne va pas entraîner un câble, faire chuter l'antenne ou abîmer la fibre optique. Refermer la porte de la chambre anéchoïque, et vérifier la configuration avec la caméra. En réalisant l'acquisition du paramètre  $S_{21}$ , relever le champ lointain tous les degrés, de  $-90^{\circ}$  à  $90^{\circ}$ , dans la bande 1,8 GHz-2,8 GHz. On surveillera l'antenne en temps réel avec la caméra pour s'assurer que tout se déroule bien pendant la rotation.

Sauvegarder les résultats, importer dans Mathematica les fichiers sauvegardés avec le notebook fourni, puis tracer dans Mathematica les courbes normées (maximum à 0 dB) des diagrammes de rayonnement en dB avec 30 dB de dynamique et les comparer aux diagrammes obtenus par simulation et à ceux présents dans la notice du fabricant de l'antenne aux fréquences suivantes : 2 GHz, 2,4 GHz et 2,8 GHz. Commenter les résultats obtenus et les comparaisons effectuées.

#### 5.4.2 En plan H : polarisation croisée

Faire tourner la sonde de 90° pour mesurer un champ électrique horizontal. En réalisant l'acquisition du paramètre  $S_{21}$ , relever le champ lointain tous les degrés, de  $-90^{\circ}$  à 90°, dans la bande 1,8 GHz-2,8 GHz. On surveillera l'antenne en temps réel avec la caméra pour s'assurer que tout se déroule bien pendant la rotation.

Sauvegarder les résultats, importer dans Mathematica les fichiers sauvegardés avec le notebook fourni, puis tracer dans Mathematica les courbes normées avec 30 dB de dynamique, et non normées, des diagrammes de rayonnement en dB et les comparer aux diagrammes obtenus en polarisation principale en plan H aux fréquences suivantes : 2 GHz, 2,4 GHz et 2,8 GHz. Commenter les résultats obtenus et les comparaisons effectuées.

### 5.4.3 En plan E: polarisation principale

L'antenne est toujours placée sur son support dans la chambre anéchoïque, mais tournée de 90°, le grand côté du cornet étant vertical maintenant. L'antenne est connectée à l'analyseur de réseau avec le câble issu de l'accès n° 1 (port 1). Le boîtier de la sonde de mesure électro-optique est connecté à l'analyseur avec le câble issu de l'accès n° 2 (port 2). S'assurer qu'une rotation de l'antenne de  $\pm 90^{\circ}$  par rapport à l'axe de la chambre ne va pas entraîner un câble, faire chuter l'antenne ou abîmer la fibre optique. Refermer la porte de la chambre anéchoïque, et vérifier la configuration avec la caméra. En réalisant l'acquisition du paramètre  $S_{21}$ , relever le champ lointain tous les degrés, de  $-90^{\circ}$  à  $90^{\circ}$  dans la bande 1,8 GHz-2,8 GHz. On surveillera l'antenne en temps réel avec la caméra pour s'assurer que tout se déroule bien pendant la rotation.

Sauvegarder les résultats, importer dans Mathematica les fichiers sauvegardés avec le notebook fourni, puis tracer dans Mathematica les courbes normées des diagrammes de rayonnement en dB avec 30 dB de dynamique et les comparer aux diagrammes obtenus par simulation et à ceux présents dans la notice du fabricant de l'antenne aux fréquences suivantes : 2 GHz, 2,4 GHz et 2,8 GHz. Commenter les résultats obtenus et les comparaisons effectuées.

### 5.4.4 En plan E : polarisation croisée

Faire tourner la sonde de  $90^{\circ}$  pour mesurer un champ électrique vertical. En réalisant l'acquisition du paramètre  $S_{21}$ , relever le champ lointain tous les degrés, de  $-90^{\circ}$  à  $90^{\circ}$  dans la bande 1,8 GHz-2,8 GHz. On surveillera l'antenne en temps réel avec la caméra pour s'assurer que tout se déroule bien pendant la rotation.

Sauvegarder les résultats, importer dans Mathematica les fichiers sauvegardés avec le notebook fourni, puis tracer dans Mathematica les courbes normées avec 30 dB de dynamique, et non normées, des diagrammes de rayonnement en dB et les comparer aux diagrammes obtenus en polarisation principale en plan E aux fréquences suivantes : 2 GHz, 2,4 GHz et 2,8 GHz. Commenter les résultats obtenus et les comparaisons effectuées.

### 5.5 Caractérisation de l'antenne en champ proche

Le boîtier de la sonde de mesure électro-optique est toujours connecté à l'analyseur avec le câble issu de l'accès n° 2 (port 2) mais le support de la sonde de mesure est maintenant sur son trépied en zone de champ proche de l'antenne à environ 60 cm de l'axe de rotation du plateau et à la hauteur du centre de l'ouverture de l'antenne. L'antenne est connectée à l'analyseur de réseau avec le câble issu de l'accès n° 1 (port 1).

On va reconstruire les diagrammes de rayonnement en plan E et plan H à partir de l'acquisition de coupes circulaires du champ proche dans ces plans [4]. Cela revient à tronquer une acquisition en champ proche sur une sphère contenant l'antenne, en la limitant à deux arcs de grands cercles orthogonaux, ce qui revient à faire deux acquisitions en champ proche sur deux cercles de cylindres orthogonaux et tangents à la sphère. On utilisera l'algorithme programmé dans Mathematica sans entrer dans les fondements de la transformation champ proche champ lointain en coordonnées sphériques ou cylindriques [5].

On s'assurera, comme dans le cas du champ lointain, du bon positionnement de la sonde électro-optique par rapport à l'antenne cornet à l'aide du système de pointage laser disponible. À nouveau, on fera très attention à ne jamais regarder directement le faisceau laser.

#### 5.5.1 Acquisition du champ proche dans le plan E

La sonde est toujours installée sur son support mais tournée de 90°, de telle sorte à mesurer un champ électrique horizontal. S'assurer qu'une rotation de l'antenne de  $\pm 90^{\circ}$  par rapport à l'axe de la chambre ne va pas entraı̂ner un câble, faire chuter l'antenne ou la sonde. Refermer la porte de la chambre anéchoïque, et vérifier la configuration avec la caméra. En réalisant l'acquisition du paramètre  $S_{21}$ , relever le champ lointain pour tous les degrés, de  $-90^{\circ}$  à  $90^{\circ}$  dans la bande 1,8 GHz-2,8 GHz. On surveillera l'antenne en temps réel avec la caméra pour s'assurer que tout se déroule bien pendant la rotation.

Sauvegarder les résultats de mesures (un fichier plan E en champ proche pour toute la bande de fréquences) en n'oubliant pas de mesurer, aussi précisément que possible, la distance entre le plan de l'ouverture et la sonde, lorsque l'antenne pointe vers le 0°.

### 5.5.2 Acquisition du champ proche dans le plan H

L'antenne est toujours placée sur son support dans la chambre anéchoïque, mais tournée de 90°, le grand côté du cornet étant maintenant horizontal. Faire tourner la sonde de 90° pour mesurer un champ électrique vertical. S'assurer qu'une rotation de l'antenne de  $\pm 90^{\circ}$  par rapport à l'axe de la chambre ne va pas entraîner un câble, faire chuter l'antenne ou la sonde. Refermer la porte de la chambre anéchoïque, et vérifier la configuration avec la caméra. En réalisant l'acquisition du paramètre  $S_{21}$ , relever le champ lointain pour tous les degrés, de  $-90^{\circ}$  à 90° dans la bande 1,8 GHz-2,8 GHz. On surveillera l'antenne en temps réel avec la caméra pour s'assurer que tout se déroule bien pendant la rotation.

Sauvegarder les résultats de mesures (un fichier plan H en champ proche pour toute la bande de fréquences).

### 5.5.3 Traitement des données de champ proche

Importer dans Mathematica les fichiers sauvegardés pour le plan H et le plan E avec le notebook fourni. Effectuer la transformation champ proche champ lointain programmée pour chacun des plans E et H. Comparer les diagrammes obtenus dans les plans E et H aux diagrammes relevés en champ lointain aux fréquences suivantes : 2 GHz, 2,4 GHz et 2,8 GHz. Commenter les résultats obtenus et les comparaisons effectuées. Conclusion.

32

### Références

- [1] W. L. Barrow, L. J. Chu, "Theory of the Electromagnetic Horn", Proceedings of the IRE, Volume: 27, Issue: 1, pp. 51-64, Jan. 1939.
- [2] P. VAUDON, "Les antennes cornets", http://patrick.vaudon.pagesperso-orange.fr/default.htm, accès vérifié en mars 2018.
- [3] W. M. LEACH, D. T. Paris, "Probe compensated near-field measurements on a cylinder", IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. AP-21, NO. 4, pp. 435-445, 1973.
- [4] T. Salmerón-Ruiz, M. Sierra-Castañer, F. Saccardi, S. Bur-Gos, F. J. Cano-Fácila, L. J. Foged, "A Fast Single Cut Spherical Near-Field-to-Far-Field Transformation Using Cylindrical Modes", The 8th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP 2014), pp. 2476-2480, 2014.
- [5] O. M. Bucci, C. Gennarelli, "Use of Sampling Expansions in Near-Field-Far-Field Transformations: The Cylindrical Case", IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. AP-36, No. 6, pp. 830-835, 1988.

### Remerciements

Le montage de cette séance de travaux pratiques n'aurait pas été possible sans l'action, le soutien ou le support de Mesdames Pernelle BOUVET, Nathalie DRACH-TEMAM et Anne MARCHAL, et de Messieurs Aziz BENLARBI-DELAÏ, Nicolas BOUREY, Yves CHATELON, Philippe GUIBERT, Valentin HOUCHOUAS, Jérôme PEQUIN et Frédéric SEGRETAIN.

Nous tenons à les en remercier chaleureusement.

Muriel DARCES et Marc HÉLIER